SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Štefanić

TOPOLOŠKI STUPANJ

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Eduard Marušić-Paloka

Zagreb, veljača 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Svrha ovog rada je opisati konstrukciju topološkog stupnja te ilustrirati neke od njegovih brojnih primjena kod proučavanja egzistencije rješenja nelinearnih jednadžbi. Prikazat ću neke osnovne ideje i rezultate, no neću ići u tehničke detalje.

U prvom poglavlju definirat ću pojam topološkog stupnja te ću dati pregled njegovih osnovnih svojstava (aksioma).

U poglavlju 2 opisat ću konstrukciju topološkog stupnja u konačnodimenzionalnom slučaju. Navest ću Borsukov teorem o antipodima koji se može primijeniti u proučavanju topološkog stupnja neparnih preslikavanja.

U poglavlju 3 navest ću osnovne pojmove vezane uz kompaktne operatore te konstrukciju stupnja u beskonačnodimenzionalnom slučaju.

U četvrtom poglavlju ću izložiti svojstva lokalnog stupnja izoliranog rješenja jednadžbe $\varphi(u) = 0$ gdje je $\varphi \in C(\overline{U}, X)$, U otvoren, a X Banachov prostor. Iznijet ću problem bifurkacije te formulirati dva osnovna teorema teorije bifurkacije, prema Krasnoselskom i Rabinowitzu.

Poglavlje 1

Uvod u topološku teoriju stupnja

Pojam topološkog stupnja prvi put spominje Jan Brouwer 1911. Brouwer je promatrao stupanj neprekidnih preslikavanja na prostoru $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, te ga koristio za dokaz Brouwerovog teorema o fiksnoj točki kojeg navodim u sljedećem poglavlju. Proširimo li definiciju topološkog stupnja na beskonačnodimenzionalan prostor dolazimo do teorije stupnja za kompaktne operatore čiji su počeci sadržani u Schauderovom radu iz 1934.

1.1 Motivacija

Detaljna konstrukcija topološkog stupnja i dokazi njegovih osnovnih svojstava nisu toliko teški i komplicirani koliko su dugački. U primjeni se obično koriste samo aksiomi. Stoga se ograničavam samo na skicu konstrukcije, bez detaljnog dokazivanja. Imamo dva slučaja za razmatranje: konačnodimenzionalni i beskonačnodimenzionalni.

Najprije ću navesti primjer koji je poseban slučaj Brouwerovog teorema o fiksnoj točki.

Primjer 1.1.1. *Neka je $T : \overline{U} \to \mathbb{R}, U = (0, 1)$ neprekidna funkcija takva da je $T(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$. Pokažimo da tada postoji $v \in \overline{U}$ takvo da je $T(v) = v$.*

Definiramo pomoćnu funkciju $\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}, \varphi(u) = u - T(u)$, čije su nultočke upravo fiksne točke od T. Provjeravamo njena svojstva na rubu od U (tj. u točkama 0 i 1). Prvo uočimo da je $\varphi(0) = -T(0) \leq 0$ i $\varphi(1) = 1 - T(1) \geq 0$. Razmotrimo sljedeća dva slučaja:

(a) Ako je $0 \in \varphi(\partial U)$, tj. ako je $\varphi(0) = 0$ ili $\varphi(1) = 0$, onda smo gotovi jer možemo uzeti da je ili $v = 0$ ili $v = 1$ redom.

(b) Ako $0 \notin \varphi(\partial U)$, onda je $\varphi(0) < 0$ i $\varphi(1) > 0$. Prema Bolzano - Weierstrassovom teoremu postoji $v \in U$ takvo da je $\varphi(v) = 0$.

1.2 Osnovna svojstva

Sada formuliramo općenitiji problem kojeg želimo proučavati. Neka je U otvoren, ograničen skup u $X = \mathbb{R}^n$ i neka je $\varphi \in C(\overline{U}, X)$. Kasnije ćemo promatrati slučaj kada je X proizvoljni Banachov prostor. Uz dano $b \in X \setminus \varphi(\partial U)$ želimo proučiti problem rješivosti jednadžbe:

$$\varphi(u) = b.$$

Mnogi praktični problemi mogu se svesti na ovu vrlo općenitu nelinearnu jednadžbu. Njena rješivost se može proučavati pomoću tzv. Brouwerovog stupnja funkcije φ s obzirom na U u točki b. Brouwerov stupanj je funkcija koja poprima cjelobrojnu vrijednost

$$\deg(\varphi, U, b),$$

i ima sljedeća osnovna svojstva (njena konstrukcija će biti opisana kasnije):

(i) **Normalizacija**: inkluzija $I : \overline{U} \to X, I(u) = u$, ima stupanj jednak

$$\deg(I, U, b) = \begin{cases} 1, & \text{za } b \in U, \\ 0 & \text{za } b \notin \overline{U} \end{cases}.$$

(ii) **Egzistencija (Kroneckerov princip)**: ako je

$$\deg(\varphi, U, b) \neq 0,$$

onda postoji rješenje jednadžbe $\varphi(u) = b \in U$.

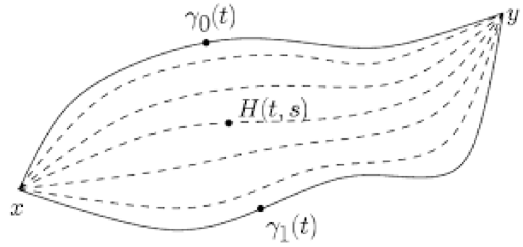
(iii) **Aditivnost**. Neka su U_1 i U_2 disjunktni neprazni otvoreni ograničeni skupovi u X i $\varphi : \overline{U_1 \cup U_2} \to X$ neprekidna funkcija, takva da $b \notin \varphi(\partial U_i), i = 1, 2$. Tada

$$\deg(\varphi, U_1 \cup U_2, b) = \deg(\varphi, U_1, b) + deg(\varphi, U_2, b).$$

(iv) **Homotopska invarijantnost**. Ako je $H \in C([0,1] \times \overline{U}, X)$ i $b \notin H([0,1] \times \partial U)$ (takvo preslikavanje H se zove homotopija), onda je

$$\deg(H(t, \cdot), U, b) = \text{const.},$$

tj. stupanj od $H(t, \cdot)$ ne ovisi o t.



Slika 1.1: Homotopija H spaja funkcije γ_0 i γ_1

Napomena 1.2.1. *Ova četiri svojstva stupnja smatraju se aksiomima teorije stupnja u smislu da se preostala svojstva koja slijede mogu iz njih izvesti. Može se pokazati da ovi aksiomi na jedinstven način određuju stupanj.*

(v) **Neprekidnost stupnja u odnosu na** φ. Preciznije, preslikavanje $\varphi \to \deg(\varphi, U, b)$ je neprekidno s obzirom na uniformnu topologiju na prostoru neprekidnih funkcija $C(\overline{U}, X)$, uz pretpostavku da $b \notin \varphi(\partial U)$.

(vi) Za računanje stupnja funkcije φ dovoljno je znati $\varphi|_{\partial U}$. Drugim riječima, ako je $\varphi = \psi$ na $\partial U, b \notin \varphi(\partial U)$, onda

$$\deg(\phi, U, b) = \deg(\psi, U, b).$$

(vii) **Svojstvo izrezivanja** Ako je K zatvoren podskup od $\overline{U}$ i $b \notin \phi(K)$, onda

$$\deg(\varphi, U \setminus K, b) = \deg(\phi, U, b).$$

(viii) Preslikavanje $X \ni b \mapsto \deg(\phi, U, b)$ je konstanta na svakoj komponenti povezanosti od $X \setminus \phi(\partial U)$.

(ix) **Formula za produkt stupnja**. Neka je $\phi_i \in C(\overline{U_i}, X_i), i = 1, 2$, gdje su U_i otvoreni i omeđeni skupovi u $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$ i $b_i \in X_i \setminus \phi(\partial U_i)$. Tada

$$\deg((\varphi_1, \varphi_2), U_1 \times U_2, (b_1, b_2)) = \deg(\varphi_1, U_1, b_1) \cdot \deg(\varphi_2, U_2, b_2).$$

Napomena 1.2.2. *Uočimo da je svojstvo (iv) ekvivalentno svojstvu (v) jer je stupanj funkcija cjelobrojne vrijednosti.*

Napomena 1.2.3. *Ako je* $\varphi_0(u) := H(0, u)$ *i* $\varphi_1(u) := H(1, u)$ *u svojstvu (iv), onda kažemo da homotopija* H *spaja funkcije* φ_0 *i* φ_1*. Preslikavanje* $[0, 1] \ni t \mapsto \varphi_t(\cdot) := H(t, \cdot)$ *može se promatrati kao put u prostoru funkcija* $C(\overline{U}, X)$ *s krajnjim točkama* φ_0 *i* φ_1*. Točke na tom putu su funkcije* $\varphi_t, t \in [0, 1]$.

Svojstvo (vi) direktna je posljedica homotopske invarijantnosti (iv) ako definiramo

$$H(t, u) = (1 - t)\varphi(u) + t\psi(u).$$

Uočimo da je put $t \mapsto H(t, \cdot)$ zapravo ravna linija koja spaja funkcije φ i ψ u vektorski prostor funkcija $C(\overline{U}, X)$. To je tzv. *afina homotopija*. Svojstvo (vii) je direktna posljedica svojstva aditivnosti i normalizacije stupnja.

Poglavlje 2

Konstrukcija stupnja u prostoru konačne dimenzije

2.1 Brouwerov stupanj

Prije opisa konstrukcije stupnja pokazat ću jedan važan rezultat.

Teorem 2.1.1. (Sard) *Neka je $\varphi \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, gdje je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ te neka je $S = \{u \in U : \det \varphi'(u) = 0\}$. Skup S zovemo singularni skup od φ. Ovdje je* $\det \varphi'(u)$ *Jakobijan od $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ u točki u, tj. determinanta $n \times n$ matrice $(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})_{i,j}$. Tada je skup singularnih vrijednosti $\varphi(S)$ preslikavanja φ Lebesgueove mjere nula u $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. (a) Neka je C zatvorena n-dimenzionalna kocka sa stranicom duljine a. Podijelimo kocku u C na k^n podkocaka sa stranicama duljine a/k. Kako je preslikavanje φ' neprekidno na C, ono je uniformno neprekidno, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takva da za sve $u, v \in C$ uvjet $|u - v| < \delta$ implicira

$$|\varphi'(u) - \varphi'(v)| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Promjer svake podkocke jednak je $\sqrt{n}a/k$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sqrt{n}a/k < \delta.$$

Preslikavanje φ je Lipschitzovo na C, kako za sve $u, v \in C$ prvo imamo

$$\varphi(v) - \varphi(u) = \int_0^1 \varphi'(u + t(v - u))(v - u)dt,$$

a zatim

$$|\varphi(v) - \varphi(u)| \leq (\sup_{w \in C} \|\varphi'(w)\|)|v - u| = K|v - u|,$$

gdje K ovisi samo o φ i C.

(b) Neka je $u \in C \cap S$. Tada postoji podkocka C_k u C sa stranicom duljine a/k takva da je $u \in C_k$. Za svaki $v \in C_k$ imamo

$$|\varphi(v) - \varphi(u)| \leq K\sqrt{n}a/k,$$

odnosno

$$\varphi(C_k) \subset B_{K\sqrt{n}a/k}(\varphi(u)).$$

Nadalje,

$$\varphi(v) - \varphi(u) - \varphi'(u)(v - u) = \int_0^1 [\varphi'(u + t(v - u)) - \varphi'(u)](v - u)dt,$$

stoga za svaki $v \in C_k$ vrijedi

$$|\varphi(v) - \varphi(u) - \varphi'(u)(v - u)| \leq \varepsilon|v - u| \leq \varepsilon\sqrt{(n)}a/k.$$

Budući da je $\det \varphi'(u) = 0$, matrica $\varphi'(u)$ nije invertibilna pa je $\varphi'(u)(\mathbb{R}^n)$ pravi potprostor od $\mathbb{R}^n$. Sada iz zadnje nejednakosti dobivamo

$$d(\varphi(v), \varphi(u) + H) \leq \varepsilon\sqrt{n}a/k, \forall v \in C_k.$$

Prema tome skup $\varphi(C_k)$ sadržan je u kvadru čiji je volumen (mjera)

$$2\varepsilon\sqrt{n}\frac{a}{k}(2K\sqrt{(n)}\frac{a}{k})^{n-1} = (2^n K^{n-1} n^{n/2} a^n k^{-n})\varepsilon.$$

Ovdje je prvi izraz na lijevoj strani visina, drugi izraz je mjera baze kocke koja leži u $H = \mathbb{R}^{n-1}$. Označimo vanjsku mjeru u $\mathbb{R}^n$ s μ^*. Tada je

$$\mu^*[\varphi(S \cap C)] \leq \sum_{C_k \cap S \neq 0} \mu^*[\varphi(C_k \cap S)] \leq \sum_{C_k \cap S \neq 0} \mu^*[\varphi(C_k)] \leq k^n \mu^*[\varphi(C_k)] = A(n, C)\varepsilon,$$

gdje je $A(n, C) = 2^n K^{n-1} n^{n/2} a^n$ konstanta koja ne ovisi o ε. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno mali, mjera skupa $\varphi(S \cap C)$ je nula. Skup S prikazan je kao prebrojiva unija skupova oblika $S \cap C_k$, što povlači da je skup $\varphi(S)$ također mjere nula.

□

Sada ću skicirati konstrukciju topološkog stupnja u konačnodimenzionalnom slučaju. Želim definirati topološki stupanj za bilo koju neprekidnu funkciju $\varphi : \overline{U} \to X$, $\overline{U} \subset X = \mathbb{R}^n$, $b \notin \varphi(\partial U)$. To se može napraviti u tri koraka: (a1) prvo za funkcije φ klase C^1 i regularan b, (a2) zatim za funkcije φ klase C^1 i singularan b i (a3) za bilo koju neprekidnu funkciju φ.

(a1) Pretpostavimo da je $\varphi \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, gdje je U otvoren i omeđen te $b \notin \varphi(\partial U)$. Pretpostavimo još da je točka b *regularna* za funkciju φ, tj. za svaki $u \in \varphi^{-1}(b)$ vrijedi $\det \varphi'(u) \neq 0$. Upotrebom teorema o inverznoj funkciji zajedno s činjenicom da $b \notin \varphi(\partial U)$ lako dobivamo da je skup $\varphi^{-1}(b)$ konačan. Posljedica toga je da je sljedeća funkcija cjelobrojne vrijednosti

$$\deg(\varphi, U, b) = \sum_{u \in \varphi^{-1}(b)} \operatorname{sgn}[\det \varphi'(u)]$$

dobro definirana. Može se pokazati da zadovoljava sva gore navedena svojstva (i)-(ix). Ako je gornja suma prazna, tj. ako $b \notin \varphi(U)$, onda je stupanj jednak nuli. Funkcija $J_\varphi(u) = \det \varphi'(u)$ je Jakobijan preslikavanja φ u točki u. Broj $|\deg(\varphi, u, b)|$ predstavlja donju granicu za broj rješenja jednadžbe $\varphi(u) = b$ u U.

(a2) Neka je sada φ klase C^1 te neka je $b \in \mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial U)$ po volji odabran element koji nije regularan, tj. postoji $u \in \varphi^{-1}(b)$ takav da je $\det \varphi'(u) = 0$. Takav element b zove se singularna vrijednost od φ. Prema Sardovom teoremu (Teorem 2.1.1) za bilo koju funkciju $\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ klase C^1 skup singularnih vrijednosti funkcije $\varphi\{\overline{u} \in \overline{U} : \det \varphi'(u) = 0\}$ je Lebesgueove mjere nula. Prema tome možemo izabrati niz regularnih vrijednosti (b_k) koji konvergira prema singularnoj vrijednosti b. Ovo nam dopušta da proširimo definiciju stupnja i za slučaj da je b singularan:

$$\deg(\varphi, U, b) = \lim_{k \to \infty} \deg(\varphi, U, b_k),$$

gdje su stupnjevi u limesu definirani kao u (a). Naravno, mora vrijediti da limes ne ovisi o izboru niza (b_k).

(a3) Neka je $\varphi \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ (tj. φ nije nužno klase C^1) i neka je $b \in \mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial U)$. Prema Stone-Weierstrass teoremu o aproksimaciji postoji niz $\varphi_k \in C^1(\overline{u}, \mathbb{R}^n)$ takav da $\varphi_k \to \varphi$ uniformno kada $k \to \infty$. Može se pokazati da je

$$\deg(\varphi, U, b) = \lim_{k \to \infty} \deg(\varphi_k, U, b)$$

dobro definirana funkcija koja poprima cjelobrojne vrijednosti te zadržava sva gore navedena svojstva stupnja.

Sada ću prikazati nekoliko zanimljivih i važnih posljedica svojstava topološkog stupnja.

Primjer 2.1.2. *Ne postoji neprekidna retrakcija kugle $B_R(0)$ u $\mathbb{R}^n$ na njen rub, tj. ne postoji neprekidna funkcija*

$$\varphi : B_R(0) \to \partial B_R(0)$$

za koju je rub kugle fiksan: $\varphi(u) = u$, *za sve* $u \in \partial B_R(0)$. *Zbog homotopske invarijantnosti slijedi*

$$deg(\varphi, B_R(0), 0) = deg(I, B_R(0), 0) = 1.$$

Kroneckerov princip daje nam kontradikciju.

Kao jednostavnu posljedicu nepostojanja neprekidne retrakcije kugle na svoj rub, možemo promatrati poznati Brouwerov teorem o fiksnoj točki.

Teorem 2.1.3. (Brouwerov teorem o fiksnoj točki) *Svaka neprekidna funkcija*

$$f : \overline{B}_R(0) \to \overline{B}_R(0), B_R(0) \subset \mathbb{R}^n,$$

ima barem jednu fiksnu točku, tj. jednadžba f(u)=u ima rješenje. Kažemo da kugla u $\mathbb{R}^n$ *ima svojstvo fiksne točke.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada svakoj točki $u \in \overline{B}_R(0)$ možemo pridružiti polupravac s početkom u točki $f(u)$ koji prolazi kroz u. Označimo sjecište tog polupravca i ruba od $B_R(0)$ sa $\varphi(u)$. Dobili smo neprekidnu retrakciju kugle na svoj rub, što je nemoguće zbog prethodnog primjera. □

Primjer 2.1.4. *Neka je* $U = B_R(0)$ *krug radijusa* $R > 0$ *u ravnini* $\mathbb{R}^2$ *i* $n \in \mathbb{N}$. *Poistovjetimo* $\mathbb{R}^2$ *s kompleksnom ravninom* $\mathbb{C}$. *Definiramo preslikavanje* $\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}^2$ *sa* $\varphi(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$. *Pokazat ćemo da vrijedi*

$$deg(\varphi, U, 0) = n.$$

Zbog toga topološki stupanj u dvodimenzionalnom slučaju zovemo brojem namotaja. Upotrebom svojstva (viii) vidimo da je $deg(\varphi, U, 0) = deg(\varphi, U, b)$ *za svaki* $b \in U \setminus \{0\}$ *dovoljno blizu* 0. *Jednadžba* $\varphi(z) = b$ *ima točno n rješenja u U i vrijedi* $|b| < R^n, b \neq 0$. *Fiksirajmo takav* $b \neq 0$. *Možemo pisati* $\varphi(z) = u + iv$, *gdje je* $u = \mathrm{Re}(\varphi)$ *i* $v = \mathrm{Im}(\varphi)$. *Sada imamo*

$$\varphi'(z) = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$$

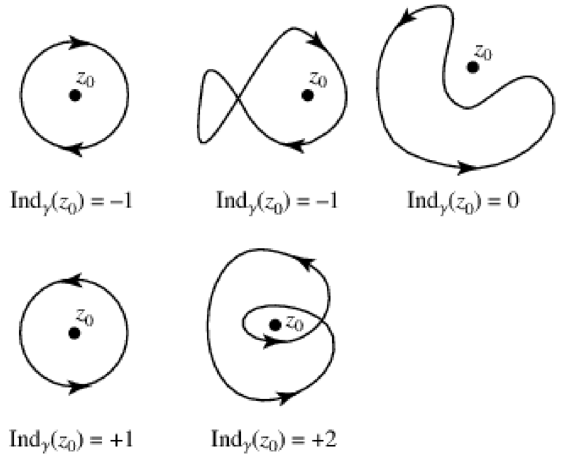
te iz Cauchy-Riemmanovih uvjeta $u'_x = v'_y, u'_y = -v'_x$ *dobivamo*

$$\det \varphi'(z) = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \geq 0.$$

Neka je $\varphi(z) = b$. *Tada je* $z \neq 0$. *Kada bi bilo* $\det \varphi'(z) = 0$, *tada bi imali*

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(z) = nz^{n-1},$$

što je nemoguće. Stoga je $\det \varphi(z) > 0$ *pa tvrdnja slijedi iz definicije topološkog stupnja (vidi (a1)).*



Slika 2.1: Geometrijska interpretacija topološkog stupnja u $\mathbb{R}^2$

Pogledajmo sada geometrijsku interpretaciju topološkog stupnja u $\mathbb{R}^2$. Funkcija $z \mapsto z^n$ preslikava rub jediničnog kruga na sebe samog obilazeći ishodište n puta.

Kako je stupanj funkcije z^n jednak n, homotopska invarijantnost dozvoljava nam da zaključimo da će njene neprekidne, dovoljno male perturbacije imati isti stupanj n. Jasno je da će perturbirana slika ruba (jedinična kružnica) biti zatvorena krivulja koja obilazi ishodište n puta.

Primjer 2.1.5. *Neka je dano preslikavanje* $\varphi : \overline{B}_1(0) \to \mathbb{R}^2(= \mathbb{C})$ *i neka je* $\gamma = \varphi(\partial B_1(0))$ *slika ruba. Pretpostavimo da* $0 \notin \gamma$. *Stupanj preslikavanja* φ *jedinstveno je određen svojom restrikcijom na rub. Označimo s* c_+ *i* c_-*, redom, broj pozitivnih i negativnih obilazaka usmjerene krivulje* γ *oko točke* 0. *Iz prethodnog primjera znamo da vrijedi*

$$Ind_\gamma(0) = \deg(\varphi, B_R(0), 0) = c_+ - c_-.$$

Ako je $Ind_\gamma(0) \neq 0$*, onda po Kroneckerovom principu preslikavanje* φ *ima barem jednu nultočku na* $B_R(0)$.

Primjer 2.1.6. *Osnovni teorem algebre: Polinom* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *stupnja* $n \geq 1$ *ima barem jednu nultočku* (C. F. Gauss). *Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je vodeći koeficijent polinoma* P *jednak* 1, *tj.* $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$, $a_k \in \mathbb{C}$. *Poistovjetimo* $\mathbb{C}$ *s* $\mathbb{R}^2$ *i promatrajmo preslikavanje*

$$H(t, z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n).$$

Neka je $U = B_R(0)$ s dovoljno velikim R tako da za bilo koji $t \in [0,1]$ i $z \in \partial U$ imamo

$$|H(t,z)| \geq R^n - (|a_1|R^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|R + |a_n|) = R^n\left[1 - \left(\frac{|a_1|}{R} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{R^{n-1}} + \frac{|a_n|}{R^n}\right)\right] > 0,$$

tj. $H(t,z) \neq 0$ za $z \in \partial U$. Kako je $H(1,z) = P(z)$ i $H(0,z) = z^n$, tvrdnja slijedi zbog homotopske invarijantnosti i Primjera 2.1.4:

$$\deg(P, U, 0) = \deg(H(0,\cdot), U, 0) = n \geq 1.$$

Primjer 2.1.7. *Neka je n paran prirodan broj. Tada ne postoji neprekidna funkcija $\varphi : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ takva da je $\varphi(u) \neq 0$ i $\varphi(u) \perp u$, za sve $u \in S^n$. Drugim riječima, bilo koji neprekidni vektorski prostor φ tangencijalan sferi ima barem jednu nultočku (tj. postoji $u \in S^n$ takav da je $\varphi(u) = 0$). Posljedica ovoga je da jež ne može biti "počešljan" neprekidno. Zato ovaj rezultat nazivaju ježev teorem.*

2.2 Borsukov teorem o antipodima

Ovdje ćemo formulirati važan rezultat koji se može primijeniti u proučavanju topološkog stupnja neparnih preslikavanja definiranih na konačnodimenzionalnom prostoru.

Teorem 2.2.1. (Borskuov teorem o antipodima) *Neka je $U = B_1(0), \varphi \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^n), \varphi(u) \neq 0$ za sve $u \in \partial U = S^{n-1}$ i*

$$\frac{\varphi(u)}{\|\varphi(u)\|} \neq \frac{\varphi(-u)}{\|\varphi(-u)\|}, \forall u \in \partial B_1(0).$$

Tada je $\deg(\varphi, U, 0)$ *neparan cijeli broj. Posebno, jednadžba* $\varphi(u) = 0$ *ima rješenje u U.*

Sljedeći rezultat kaže da je neprekidna injektivna slika otvorenog skupa otvoren skup.

Teorem 2.2.2. (Brouwer, Schauder; Teorem o invarijantnosti domene) *Neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ neprekidna injekcija. Tada je skup $\varphi(U)$ također otvoren.*

Dokaz. Izaberimo proizvoljan $u_0 \in U$ i neka je $v_0 = \varphi(u_0)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $u_0 = 0$. Neka je $r > 0$ dovoljno mali takav da je $B_r(0) \subseteq U$. Za $(t,u) \in [0,1] \times \partial B_r(0)$ definiramo

$$H(t,u) = \varphi((1+t)^{-1}u) - \varphi(-t(1+t)^{-1}u).$$

Ako smo imali $H(t,u) = 0$, onda bi injektivnost implicirala $(1+t)^{-1}u = -t(1+t)^{-1}u$, tj. $u = 0$, što je kontradikcija s $\|u\| = r$. Jasno je da je $H(1,-u) = -H(1,u)$ pa je prema teoremu o antipodima

$$\deg(H(0,\cdot), B_r(0), 0) = \deg(H(1,\cdot), B_r(0), 0) \neq 0,$$

tj. $\deg(\varphi - v_0, B_r(0), 0) \neq 0$. Neprekidnost stupnja (vidi svojstvo (v)) implicira da je $\deg(\varphi - v, B_r(0), 0) \neq 0$ za sve v u kugli oko y_0 pa tvrdnja slijedi iz Kroneckerovog principa. □

Sljedeći teorem o antipodalnim točkama jednostavna je posljedica Teorema 2.2.1. Za dvije točke oblika $u_0 \neq 0$ i $-u_0$ kažemo da su antipodalne s obzirom na ishodište.

Teorem 2.2.3. (Borsuk, Ulam) *Neka je S^{n-1} jedinična sfera u $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da preslikavanje $\varphi : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ neprekidno, $m < n$. Tada postoji $u_0 \in S^{n-1}$ takvo da je $\varphi(u_0) = \varphi(-u_0)$.*

Dokaz. Prostor $\mathbb{R}^m$ je sadržan u prostoru $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Uporabom Tietzovog teorema možemo proširiti funkciju φ neprekidno na $\varphi_1 : \overline{B}_1(0) \to \mathbb{R}^m$. Definiramo
$\psi(u) = \varphi_1(u) - \varphi_1(-u)$. Kako je prostor $\mathbb{R}^m$ sadržan u $\mathbb{R}^n$, došli smo do funkcije $\psi : \overline{B_1}(0) \to \mathbb{R}^n$ čija je slika sadržana u $\mathbb{R}^m$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji teorema, da je $\psi(u) \neq 0$ za sve $u \in S^{n-1}$. Budući da je preslikavanje ψ neparno, možemo primijeniti Borsukov teorem o antipodima da zaključimo kako je $\deg(\psi, B_1(0), 0) \neq 0$. Prema neprekidnosti stupnja imamo $\deg(\psi - v, B_1(0), 0) \neq 0$ za v u dovoljno maloj kugli u $\mathbb{R}^n$ oko ishodišta, tj. jednadžba $\psi(u) = v$ je rješiva za sve takve v. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je rang od ψ sadržan u $\mathbb{R}^m$. □

Poglavlje 3

Konstrukcija stupnja u beskonačnodimenzionalnom prostoru

U ovom poglavlju proširujem definiciju topološkog stupnja iz konačnodimenzionalnog prostora u beskonačnodimenzionalan. Nameće se pitanje je li moguće formirati teoriju topološkog stupnja za sva neprekidna preslikavanja, imajući svojstva navedena u prvom poglavlju. Navest ću primjer iz kojega vidimo da u tom slučaju sva neprekidna preslikavanja moraju biti homotopna. Prema svojstvu invarijantnosti, to znači da bi sva preslikavanja imala isti stupanj. Zbog toga teorija topološkog stupnja treba biti razvijena za mnogo užu klasu od prostora svih neprekidnih funkcija na beskonačnodimenzionalnom prostoru X. To će biti kompaktne perturbacije identitete na X (odnosno identiteta i kompaktni operatori). Slijedi kratak uvod u kompaktne operatore, zatim prelazim na konstrukciju.

3.1 Kompaktni operatori

Kompaktni operatori imaju mnoga svojstva operatora na konačnodimenzionalnim prostorima. Tako je npr. spektar $\sigma(K)$ kompaktnog operatora K prebrojiv skup i on ima nulu kao jedino moguće gomilište. Nadalje, svaka točka $\lambda \neq 0$ spektra operatora K svojstvena je vrijednost od K i ima konačnu algebarsku kratnost. Ako je $\dim X = \infty$, onda je 0 u spektru svakog kompaktnog operatora.

Kompaktni operatori se nalaze "između" operatora na konačnodimenzionalnim prostorima i općih ograničenih operatora na beskonačnodimenzionalnim prostorima. Za kompaktan operator K na Hilbertovom prostoru X postoji niz operatora $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konačnog ranga koji uniformno konvergiraju prema K.

Slijedi nekoliko definicija pojmova koji se spominju u ostatku poglavlja i daljnjem radu.

Definicija 3.1.1. *Norma na vektorskom prostoru X je preslikavanje*

$$||\cdot|| : X \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty > (x \mapsto ||x||)$$

sa sljedećim svojstvima:

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$,
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Vektorski prostor na kojem je zadana norma zove se normiran prostor.

Definicija 3.1.2. *Niz (x_n) u normiranom prostoru X zove se Cauchyjev niz ako vrijedi:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da } m, n \geq n_0 \Rightarrow ||x_m - x_n|| < \varepsilon.$$

Normiran prostor je potpun ako je u njemu svaki Cauchyjev niz konvergentan. Potpun normiran prostor zove se Banachov prostor. Vektorski prostor na kojem je zadan skalarni produkt zove se unitaran prostor. Potpun unitaran prostor zove se Hilbertov prostor.

Skup S zove se kompaktan ako za svaki otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač. Skup S je kompaktan ako i samo ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji je limes u S. Skup S je relativno kompaktan ako svaki niz u S ima konvergentan podniz (bez zahtjeva da je limes tog podniza u S).

Definicija 3.1.3. *Kompaktni operator $T : X \to Y$ između dva metrička prostora definiran je kao neprekidni operator takav da je slika bilo kojeg omeđenog skupa u X relativno kompaktna s Y.*

3.2 Leray-Schauderov stupanj

Prije konstrukcije navodim nekoliko primjera. U prvom primjeru pokazujemo da jedinična kugla u beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru nema svojstvo fiksne točke, za razliku od konačnodimenzionalnog slučaja.

Primjer 3.2.1. *Neka je $X = l_2$, gdje je l_2 Hilbertov prostor kvadratno sumabilnih nizova realnih brojeva:*

$$l_2 = \{u_2 = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}, ||u|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definiramo neprekidni operator $T : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ sa

$$T(u) = \left(\sqrt{1-\|u\|^2}, x_1, x_2, \dots \right).$$

Uočimo da nije kompaktan. Npr. slika standardne Schauderove baze, koja je omeđena, nije relativno kompaktna. Usporedbom komponenti lako se vidi da jednadžba $T(u) = u$ nema rješenje. Inače bi imali $\sqrt{1-\|u\|^2} = x_1, x_1 = x_2, x_2 = x_3$, itd. što povlači $u = 0$. No, tada je jednadžba $\sqrt{1-\|u\|^2} = x_1$ nemoguća.

Primjer 3.2.2. *Promotrimo situaciju iz prethodnog primjera. Za dano $u \in \overline{B}_1(0)$ možemo definirati zraku kroz u s početkom u $T(u)$. Označimo njeno sjecište s rubom od $B_1(0)$ s $\varphi(u)$. Ovo očito definira neprekidnu retrakciju kugle na svoj rub. Kao što smo vidjeli prije, ovo se ne može dogoditi u konačnodimenzionalnom slučaju.*

Primjer 3.2.3. *Ako je prostor X konačnodimenzionalan i ako neprekidno preslikavanje $\psi : \overline{B}_1(0) \to X \times \mathbb{R}$ fiksira rub jedinične kugle, tj. $\psi(u) = (u, 0), u \in \partial(B_1(0))$, onda pravac $0 \times \mathbb{R}$ u $X \times \mathbb{R}$ očito presijeca skup $\psi(B_1(0))$.*

Takvo svojstvo presjeka ne vrijedi u beskonačnodimenzionalnom slučaju. Dovoljno je promatrati preslikavanje $\psi : \overline{B}_1(0) \to l_2 \times \mathbb{R}, \psi(u) = (\varphi(u), 0)$, gdje je φ definirano u Primjeru 3.2.2. Ovdje $\psi(B_1(0)) \cap (0 \times \mathbb{R}) = \emptyset$, zato jer je $\varphi(u) \neq 0$ za sve $u \in \overline{B_1(0)}$.

Primjer 3.2.4. *Za bilo koje dvije neprekidne funkcije $f, g : \partial B_1(0) \to \partial B_1(0)$ definirane na beskonačnodimenzionalnom prostoru l_2 moguće je definirati homotopiju*

$$H(t, u) = \varphi((1 - t) f(u) + t g(u))$$

koja povezuje funkcije f i g, tj. $H(0, \cdot) = f$ i $H(1, \cdot) = g$. Ovdje je φ funkcija iz Primjera 3.2.2.

Iz zadnjeg primjera vidimo da sva neprekidna preslikavanja moraju biti homotopna želimo li formirati teoriju topološkog stupnja za sva neprekidna preslikavanja.

Sljedeći rezultat, zahvaljujući Schauderu, omogućuje nam da bilo koji kompaktni operator aproksimiramo operatorom konačnodimenzionalnog ranga. To nam dozvoljava da proširimo definiciju topološkog stupnja s konačnodimenzionalnog prostora na kompaktne perturbacije identitete definirane na Banachovim prostorima.

Propozicija 3.2.5. *Neka je U otvoren i omeđen skup u Banachovom prostoru X i $T : \overline{U} \to X$ kompaktni operator. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačnodiomenzionalni potprostor X_ε u X i preslikavanje $T_\varepsilon : \overline{U} \to X_\varepsilon$ takvo da je*

$$\|T(u) - T_\varepsilon(u)\| \leq \varepsilon$$

za svaki $u \in U$. Operator T_ε zove se Schauderova aproksimacija od T.

Dokaz. Neka je $B_\varepsilon(x_j)$, $j = 1,\dots,n$ konačan pokrivač skupa $T(\overline{U})$ (on postoji zbog kompaktnosti operatora T). Označimo particiju odgovarajućeg pokrivača sa $\psi_j \in C(X,[0,1])$:

$$\text{supp}\psi \subseteq B_\varepsilon(u_j), \sum_{j=1}^{n} \psi_j(v) = 1, \forall v \in T(\overline{U}).$$

Definirajmo $T_\varepsilon(u) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(T(u))u_j$. Operator T_ε je konačnodimenzionalnog ranga, stoga je kompaktan i imamo

$$\|T(u) - T_\varepsilon(u)\| =\| \sum_{j=1}^{n} \psi_j(T(u))[T(u) - u_j]\| = \sum_{\substack{j \\ T(u)\in B_\varepsilon(u_j)}} \psi_j(T(u))\|[T(u) - u_j]\| \leq \varepsilon,$$

što dokazuje tvrdnju. □

U slučaju $X = \infty$ važnu ulogu u konstrukciji stupnja ima činjenica da kompaktne perturbacije identitete nisu previše zbijene. Kažemo da je nelinearno preslikavanje $S : \overline{U} \to X$ pravo ako je inverzna slika bilo kojeg kompaktnog skupa kompaktna. Trivijalni primjer je preslikavanje identitete. Sljedeća propozicija kaže da su kompaktne perturbacije identitete prave.

Propozicija 3.2.6. *Neka je $T : \overline{U} \to X$ kompaktni operator i U otvoren i omeđen podskup Banachovog prostora X. Tada je preslikavanje $\varphi = I - T$ zatvoreno (tj. slika zatvorenog skupa je zatvoren skup) i pravo.*

Dokaz. a) Neka je M zatvoren podskup u X i neka je (u_k) niz u M takav da $\varphi(u_k) \to v$. Moramo dokazati da postoji $u \in M$ takav da je $\varphi(u) = v$. Kako je niz (u_k) ograničen, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti (nakon eventualno prelaska na podniz) da $T(u_k) \to w$. No onda $u_k \to v + w \in M$, t.j. $T(u_k) \to T(v + w)$. Prema tome, $w = T(u + v)$ pa je $v = \varphi(v + w)$.

b) Neka je K kompaktan skup i (u_k) niz u $\varphi^{-1}(K)$. Nakon eventualnog prijelaza na podniz možemo zaključiti da $\varphi(u_k)$ *konvergira*. Također zbog kompaktnosti operatora T možemo zaključiti (ponovo prelazeći na podniz) da je niz $T(u_k)$ *konvergentan*. Prema tome je niz

$$u_k = \varphi(u_k) + T(u_k)$$

također konvergentan, što znači da je skup φ^{-1} kompaktan. □

Direktna posljedica navedene propozicije je sljedeći korolar.

Korolar 3.2.7. *Skup $\varphi(\partial U)$ je zatvoren. Posebno, kako $b \notin \varphi(\partial U)$, udaljenost $\delta = d(b, \varphi(\partial U))$ je pozitivna.*

Sada upotrebom rezultata o aproksimaciji u Propoziciji 3.2.5 možemo nastaviti s konstrukcijom stupnja u beskonačnodimenzionalnom slučaju.

(b1) Prvo ću konstruirati topološki stupanj u slučaju kada je slika $T(\overline{U})$ sadržana u konačnodimenzionalnom prostoru $X_n, \varphi = i - T$ i $b \notin \varphi(\partial U)$:

$$\deg(\varphi, U, b) = \begin{cases} \deg(\varphi|_{\overline{U} \cap X_n}, u \cap X_n, b), & \text{za } U \cap X_n \neq \emptyset, \\ 0 & \text{za } U \cap X_n = \emptyset \end{cases}.$$

(b2) Neka je $T : \overline{U} \to X$ kompaktni operator, $\varphi = i - T$, i $b \notin \varphi(\partial U)$, $\delta = d(\partial U, b) > 0$. Tada postoji Schauderova aproksimacija $T_{\delta/2}$ od T za koju je stupanj definiran u (b1). Sada definiramo

$$\deg(\varphi, U, b) = \deg(\varphi_{\delta/2}, U, b),$$

gdje $\varphi_{\delta/2} = I - T_{\delta/2}$. Može se pokazati da je definicija dobra, tj. da ne ovisi o izboru Schauderove aproksimacije. Topološki stupanj definiran na ovaj način posjeduje sva svojstva (i) - (ix) navedena u prvom poglavlju. Stupanj kompaktnih perturbacija identitete definiran na ovaj način na proizvoljnom Banachovom prostoru zove se *Leray-Schauderov stupanj*.

Sada možemo iznijeti neke važne rezultate o kompaktnim operatorima. Sljedeći teorem predstavlja poopćenje Brouwerovog teorema o fiksnoj točki na beskonačnodimenzionalan slučaj.

Teorem 3.2.8. (Schauderov teorem o fiksnoj točki) *Neka je X Banachov prostor, $K = \overline{B}_R(0)$ i $T : K \to X$ kompaktni operator takav da je $T(K) \subseteq K$. Tada postoji fiksna točka preslikavanja T.*

Dokaz. Pretpostavimo da za sve $u \in \partial K$ imamo $T(u) \neq u$ (inače nemamo što dokazati). Neka je $H(t, u) = u - tT(u)$. Tada je H dopustiva homotopija, kako za bilo koji fiksan $t \in [0, 1]$ ne postoji u na rubu kugle K takav da je $H(t, u) = 0$. Zapravo, $H(t, u) = 0$ za neke $u \in \partial K$, takve da je $\|u\| = R$ pa za $0 \leq t < 1$ imamo kontradikciju: $tR \geq t\|T(u)\| = \|u\| = R$, t.j. $t \geq 1$.

□

Teorem 3.2.9. (Leray-Schauderov princip) *Neka je X Banachov prostor i $T : X \to X$ kompaktno preslikavanje takvo da je $u \neq tT(u)$ za sve u, $\|u\| = R > 0$ i $t \in (0, 1)$. Tada T posjeduje fiksnu točku.*

Dokaz. Definirajmo $\varphi(u) = u - T(u)$ i $H(t, u) = u - tT(u)$. Pretpostavimo da $0 \notin \varphi(\partial B_r(0))$ (inače nemamo što dokazati). Iz uvjeta teorema vidimo da $H(t, u) \neq 0$ za sve $u \in \partial B_R(0)$, $t \in [0, 1]$. To implicira da je $\deg(H(t, \cdot), B_R(0), 0)$ dobro definiran i zbog homotopske invarijantnosti imamo $\deg(\varphi, \cdot), B_R(0), 0) = \deg(I, B_R(0), 0) = 1$. Tvrdnja slijedi iz Kroneckerovog principa. □

Napomena 3.2.10. *U primjeni nekad imamo situaciju da jednadžba* $u = tT(u), t \in [0,1]$ *implicira apriornu ocjenu za svoja rješenja:* $\|u\| \leq R$ *za neki* $R > 0$ *nezavisan s* t*. Tada imamo* $u \neq tT(u)$ *za sve* $u \in \partial B_{R+1}(0)$*, što po Leray-Schauderovom principu povlači postojanje fiksne točke od* T*.*

Teorem 3.2.11. (Krasnoselski) *Neka je* X *Hilbertov prostor i neka je* $T : X \to X$ *kompaktno preslikavanje takvo da je* $\langle u - T(u), u\rangle \geq 0$ *za sve* u*,* $\|u\| = R$*, gdje je* $R > 0$*. Tada* T *posjeduje fiksnu točku u* $\overline{B}_R(0)$*.*

Dokaz. Neka je $\varphi(u) = u - T(u)$ i pretpostavimo da $0 \notin \varphi(\partial B_R(0))$ (inače nemamo ništa za dokazati). Jasno je da je $u \neq tT(u)$ za sve $u \in \partial B_R(0)$ i $t = 0$ ili $t = 1$. Ako imamo $u = tT(u)$ za neke $u \in \partial B_R(0)$ i $t \in (0,1)$, onda $T(u) = \frac{1}{t}u$ i uvjet teorema povlači $(1 - 1/t)\|u\|^2 = 0$, t.j. $u = 0$, što je nemoguće. Dakle, $u \neq tT(u)$ za sve $u \in \partial B_R(0)$ i $t \in (0,1)$ pa tvrdnja slijedi iz Leray-Schauderovog principa. $\square$

Napomena 3.2.12. *Borsukov teorem o antipodima može biti poopćen na beskonačnodimenzionalan Banachov prostor* X*, gdje je* $\varphi(u) = u - T(u)$ *i operator* $T : \overline{U} \to X$ *je kompaktan. To se može napraviti upotrebom Schauderove aproksimacije od* T*.*

Poglavlje 4

Topološka teorija bifurkacija

Problemi bifurkacije opisani su nelinearnim jednadžbama oblika

$$F(\mu, u) = 0, \tag{4.1}$$

gdje se pojavljuje realan parametar μ. Ovdje je $F : \mathbb{R} \times X \to X$ nelinearna funkcija i X Banachov prostor. Dakle, rješenja ovakve jednadžbe su parovi oblika $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times X$. Uz dano μ, možemo govoriti o u kao o rješenju jednadžbe (4.1). Važno pitanje je kako skup rješenja varira ovisno o μ. Naime, kako se μ mijenja, broj rješenja se može mijenjati.

Ako pretpostavimo da je $F(\mu, 0) = 0$ za sve μ, onda kažemo da je skup $\{(\mu, 0) \in \mathbb{R} \times X : \mu \in \mathbb{R}\}$ pravac trivijalnih rješenja. Točka bifurkacije jednadžbe (4.1) je vrijednost parametra $\overline{\mu}$ takva da u svakoj ε-okolini trivijalnog rješenja $(\overline{\mu}, 0)$ u $\mathbb{R} \times X$ postoji netrivijalno rješenje $(\mu_\varepsilon, u_\varepsilon)$, tj. u_ε je različito od 0 i male je norme te je μ_ε blizu $\overline{\mu}$. U većini primjena točku bifurkacije gledamo kao rješenje $(\overline{\mu}, 0) \in \mathbb{R} \times X$ takvo da postoji neprekidna krivulja rješenja $(\mu(s), u(s)) \in R \times X$ parametrizirana sa $s \in [0, s_0)$ koja djeli pravac trivijalnih rješenja u točki $(\overline{\mu}, 0)$, tj. $\mu(0) = \overline{\mu}, u(0) = 0$ i $u(s) \neq 0$ za $s \neq 0$. Teorija bifurkacija bavi se proučavanjem točaka bifurkacija te lokanih i globalnih svojstava skupa rješenja (μ, u). Problemi bifurkacija nameću se u elastičnosti, populacijskoj dinamici, prijenosu topline itd. Mnogi takvi problemi mogu se formulirati kao fiksne točke jednadžbi na odgovarajućem Banachovom prostoru (jednadžba (4.2)).

4.1 Stupanj izoliranih rješenja

U ovom odlomku izlažem svojstva lokalnog stupnja izoliranih rješenja jednadžbe $\varphi(u) = 0$. To će biti vrlo važno za uspostavljanje globalnog rezultata o bifurkaciji prema Rabinowitzu.

Lema 4.1.1. *Neka je U otvoren i omeđen skup u Banachovom prostoru X i $T \in C^1(\overline{U}, X)$ kompaktni operator. Tada je linearni operator $T'(u_0)$ kompaktan za sve $u_0 \in U$.*

Dokaz. Iz definicije Fréchetove derivacije dobivamo da operatori $T_\varepsilon : x \to X$ definirani s $T_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}(T(u_0 + \varepsilon u) - T(u_0))$ imaju svojstvo da $T_\varepsilon \to T'(u_0)$ uniformno na U kada $\varepsilon \to 0$. Operatori T_ε su kompaktni pa je njihov limes $T'(u_0)$ na uniformnoj topologiji također kompaktan. □

Lema 4.1.2. *Neka je U otvoren i omeđen skup u $\mathbb{R}^n$ koji sadrži u_0 i $T \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, $T(u_0) = u_0$. Pretpostavimo da $1 \notin \sigma(L)$, gdje je $L := T'(u_0)$. Označimo sve karakteristične vrijednosti matrice L s $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (pri čemu su karakteristične vrijednosti po definiciji recipročne svojstvenim vrijednostima). Tada postoji $r > 0$ takav da za sve $0 < \varepsilon < r$ vrijedi*

$$deg(I - T, B_\varepsilon(u_0), 0) = (-1)^{\beta(1)},$$

gdje je $\beta(1)$ suma kratnosti realnih karakterističnih vrijednosti sadržanih u intervalu $(0, 1)$. Ako u intervalu $(0, 1)$ nema karakterističnih vrijednosti, stupanj je jednak 1. Stupanj dobiven na ovaj način često nazivamo indeksom preslikavanja T u točki u_0.

Dokaz. Neka je $\varphi(u) = u - T(u)$. Kako $1 \notin \sigma(L)$ operator $I - L$ je invertibilan, po teoremu o inverznoj funkciji točka $u = u_0$ je izolirano rješenje jednadžbe $\varphi(u) = 0$. Dakle, stupanj od $\varphi = I - T$ je dobro definiran u nekoj okolini od u_0. Neovisnost stupnja o izboru dovoljno malog radijusa $\varepsilon > 0$ slijedi direktno iz svojstva izrezivanja stupnja. Sada uočimo da je $\det(I - L) = \prod_{\lambda_j \in \sigma(L)} (1 - \lambda_j)^{m_j}$, gdje je m_j algebarske kratnosti svojstvene vrijednosti λ_j. Kako je $\lambda_j = 1/\mu_j$ imamo

$$\deg(\varphi, B_{\varepsilon(0)}, 0) = \operatorname{sgn} \prod_j (1 - \frac{1}{\mu_j})^{m_j} = \prod \operatorname{sgn}(1 - \frac{1}{\mu_j})^{m_j}.$$

Uočimo da je $\operatorname{sgn}(1 - 1/\mu_j) = -1$ samo za $\mu_j \in (0, 1)$. Ako je $\mu_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (tj. $\operatorname{Im} \mu_j \neq 0$), onda također imamo konjugirano kompleksnu vrijednost $\overline{\mu_j}$ pa je odgovarajući produkt pozitivan. To znači da takve svojstvene vrijednosti ne utječu na vrijednost stupnja i dovoljno je razmatrati samo realne svojestvene vrijednosti iz $(0, 1)$. □

Lema 4.1.3. *Neka je X Banachov prostor i neka je operator $T : X \to X$ kompaktan i Frécshet derivabilan u okolini točke u_0 i $u_0 = T(u_0)$. Pretpostavimo da $1 \notin \sigma(L)$, gdje je $L = T'(u_0)$. Tada za $r > 0$ dovoljno mali imamo*

$$deg(I - T, B_r(u_0), 0) = deg(I - L, B_\varepsilon(u_0), 0).$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $U_0 = 0$ i $T(0) = 0$. Zapravo, dovoljno je promatrati operator $S(u) = T(u_0 + u) - T(u_0)$. Uočimo da je $S(0) = 0$, $S'(0) = T'(u_0) = L$ i $\deg(I - S, B_r(0), 0) = \deg(I - T, B_r(u_0), 0)$. Kako $1 \notin \sigma(L)$ zaključujemo da je $I - L$ invertibilna te po teoremu o inverznoj funkciji $I - T$ je difeomorfizam na okolini $B_r(0)$ oko 0. Iz ovoga vidimo da $0 \notin (I - T)(\partial B_r(0))$ za proizvoljno mali r zato što je $(I-T)(0)=0$. Prema tome, $\deg(I-T, B_r(u_0), 0)$ je dobro definiran. Promotrimo deformaciju $H(t,u) = u - \frac{T(tu)}{t}$ za $t \in (0,1]$ i $H(0,u) = u - Lu$. Uočimo da je $\lim_{t\to 0} \frac{T(tu)}{t} = Lu$ pa je $H : [0,1] \times X \to X$ neprekidna. Pokažimo da je $H(t,u) \neq 0$ za sve u za koje je $\|u\| = r > 0$ dovoljno mali. Pretpostavimo suprotno: $H(t,u) = 0$ za neke u, $\|u\| = r$. Imamo $t \neq 0$ zato što $1 \notin \sigma(L)$. Dakle, $u = \frac{T(tu)}{t}$. Označimo $v := tu \neq 0$. Tada je $0 < \|v\| \leq r$ i $T(v) = v$. Po definiciji Fréchetove derivacije imamo $T(v) = L(v) + o(v)$ pa je $(I-L)v = o(v)$. Kako je operator $I-L$ invertibilan, imamo

$$\|v\| \leq \|(I-L)^{-1}\| \cdot \|o(v)\|$$

što je nemoguće za $r > 0$ dovoljno mali, kako $\frac{o(v)}{\|v\|} \to 0$ kada $v \to 0$. Dakle, za r dovoljno mali H je dopustiva homotopska invarijantnost stupnja. □

Teorem 4.1.4. *Neka je $T : X \to X$ kompaktni operator koji je Fréchet derivabilan u okolini točke u_0 i neka je $L = T'(u_0)$. Pretpostavimo da je $u_0 = T(u_0)$ i $1 \notin \sigma(L)$. Tada za sve r dovoljno male imamo*

$$deg(I-T, B_r(u_0), 0) = (-1)^{\beta(1)},$$

gdje je $\beta(1)$ suma kratnosti svih realnih karakterističnih vrijednosti od L u intervalu $(0,1)$.

Dokaz. Neka je $\varphi = I - T$. Najprije uočimo da je $\varphi'(u_0) = I - L$ invertibilna kako $1 \notin \sigma(L)$. Prema teoremu o inverznoj funkciji točka u_0 je izolirano rješenje jednadžbe $\varphi(u) = 0$, tj. u_0 je jedinstveno rješenje u $B_r(u_0)$ za $r > 0$ dovoljno mali. Možemo izraziti X kao direktnu sumu $V \oplus W$, gdje je V prostor generiran svojstvenim vektorima koji odgovaraju karakterističnim vrijednostima μ_k u $(0,1)$. Preciznije, $V = \cup_{\mu_k \in (0,1)} \cup_{m=1}^{\infty} N(I - \mu_k L)^m$. Prostor W definiran je analogno: generiran je svojstvenim funkcijama odgovarajućih karakterističnih vrijednosti izvan intervala $(0,1)$. Uočimo da je $\dim V < \infty$ te da su V i W L-invarijantni, tj. $L(V) \subset V$ i $L(W) \subset W$. Tada prema produktnoj formuli imamo

$$\deg(I-L, B_r(u_0), 0) = \deg((I-L)|_V, B_r(u_0) \cap V, 0_V) \cdot \deg((I-L)|_W, B_r(u_0) \cap W, 0_W).$$

Sada definiramo homotopiju $H : [0,1] \times W \to W$ sa $H(t,w) = w - tLw$. Ona je dopustiva jer iz $w' = tLw$ za neki $t \in [0,1]$ nužno slijedi w=0. Prema tome, drugi izraz produkta na desnoj strani prethodne jednadžbe jednak je 1 pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.1.1:

$$\deg(\varphi, B_r(u_0), 0) = \deg((I-L)|_V, B_r(u_0) \cap V, 0_V) = (-1)^{\beta(1)}.$$

□

4.2 Problem bifurkacije

Neka je X Banachov prostor i $L : X \to X$ ograničen linearni operator, $N : X \to X$ nelinearno preslikavanje takvo da je $N(u) = o(u)$ kad $u \to 0$, tj. $\lim_{u\to 0} \frac{N(u)}{\|u\|} = 0$. Želimo proučiti jednadžbu

$$u = \mu(Lu + N(u)) \tag{4.2}$$

čija su rješenja parovi $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times X$. Izraz $Lu + N(u)$ je perturbacija linearnog operatora Lu s nelinearnom funkcijom $N(u)$ koja poprima malu vrijednost za $u = 0$.

Navedeni problem (4.2) očito ima pravac trivijalnih rješenja $(\mu, 0), \mu \in \mathbb{R}$. Kažemo da je $(\overline{\mu}, 0)$ točka bifurkacije gornje jednadžbe ako postoji niz netrivijalnih rješenja $(\mu_n, u_n) \in \mathbb{R} \times X, u_n \neq 0$, takvih da $\mu_n \to \overline{\mu_n}, u_n \to 0$ kada $n \to \infty$.

Primjer 4.2.1. *Ako je $N = 0$, onda problem bifurkacije postaje problemom pronalaženja karakterističnih vrijednosti μ od $L : u = \mu Lu$. Svaki par $(\overline{\mu}, 0)$ takav da je $\overline{\mu}$ karakteristična vrijednost od L je točka bifurkacije. Zapravo, skup rješenja $(\overline{\mu}, v) \in \mathbb{R} \times X, v \neq 0$ gdje su v svojstveni vektori koji odgovaraju $\overline{\mu}$, gomilaju se u točki $(\overline{\mu}, 0)$.*

Primjer 4.2.2. *Promotrimo problem bifurkacije $u = \mu(2u + u^3)$ u prostoru $X = \mathbb{R}$. Skup netrivijalnih rješenja je $u = \pm(\frac{1}{\mu} - 2)^{1/2}, \mu > \frac{1}{2}$. Za $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ imamo par netrivijalnih rješenja, dok izvan tog intervala postoje samo trivijalna rješenja. Zatvarač skupa S netrivijalnih rješenja je povezan i sadrži $(\frac{1}{2}, 0) \in \mathbb{R} \times X$, što je očito točka bifurkacije danog problema. Uočimo da je $\overline{\mu} = \frac{1}{2}$ karakteristična vrijednost operatora $Lu = 2u$ i njena kratnost je 1.*

Teorem 4.2.3. *Neka je X Banachov prostor i neka je $L : X \to X$ komapktni linearni operator. Pretpostavimo da je funkcija $N : X \to X$ takva da je $N(u) = o(u)$ kada $u \to 0$, tj. $\lim_{u \to 0} \frac{N(u)}{||u||} = 0$. Ako je $(\overline{\mu}, 0) \in \mathbb{R} \times X$ točka bifurkacije jednadžbe $u = \mu(Lu + N(u))$, onda je $\overline{\mu}$ karakteristična vrijednost linearnog problema $u = \mu Lu$.*

Dokaz. Imamo $u_n = \mu_n(Lu_n + N(u_n))$ sa $u_n \neq 0$, $u_n \to 0$ i $\mu_n \to \overline{\mu}$. Pretpostavimo da $\overline{\mu}$ nije karakteristična vrijednost od L. Tada je $I - \mu L$ invertibilna kao i $I - \mu_n L$ za n dovoljno velik (ovdje koristimo činjenicu da je skup rješenja od L otvoren). Po neprekidnosti linearnog operatora L također imamo $(I - \mu_n L)^{-1} \to (I - \overline{\mu} L)^{-1}$ kad $n \to \infty$. Sada jednadžbu $(I - \mu_n L)u_n = N(U - N)$ možemo pisati kao $u_n = (I - \mu_n L)^{-1} N(u_n)$. To povlači

$$1 \leq ||(I - \mu_n L)^{-1}|| \tfrac{||N(U_n)||}{||u_n|} \to 0, \text{ kada } n \to \infty.$$

Ovo je očito kontradikcija. □

Primjer 4.2.4. *Gore navedeni nužni uvjet da bi točka $(\overline{\mu}, 0)$ bila točka bifurkacije nije i dovoljan, čak ni u slučaju konačne dimenzije. Uzmimo na primjer $X = \mathbb{R}^2$, $u = (x, y)$, $L = I$, $N(u) = (-y^3, x^3)$. Tada je jednadžba $u = \mu(Lu + N(u))$ ekvivalentna $x = \mu(x - y^3)$ i $y = \mu(y + x^3)$. Pomnožimo li prvu jednadžbu s y, a drugu s x, te ih zatim oduzmemo, dobili smo $x^4 + y^4 = 0$, tj. $u = 0$. Dakle, ovaj problem bifurkacije ima samo trivijalna rješenja. To znači da jedina karakteristična vrijednost od L, $\mu = 1$, nije točka bifurkacije. Uočimo da je algebarska kratnost ove karakteristične vrijednosti parna i jednaka 2.*

Sada ću formulirati osnovni teorem teorije bifurkacija. Sastoji se od dva dijela: lokalni i globalni rezultat, prema Krasnoselskom i Rabinowitzu, redom. Iako je Rabinowitzev teorem generalizacija Krasnoselskovog teorema, bit će uključen i dokaz kasnije nastalog teorema.

Teorem 4.2.5. *Neka je X Banachov prostor, $L : X \to X$ kompaktni linearni operator, $N : X \to X$ kompaktni nelinearni operator takav da je $N(u) = o(u)$ kada $u \to 0$, i neka je μ_0 karakteristična vrijednost od L čija je algebarska kratnost neparna.*
Neka je S skup svih netrivijalnih rješenja problema $u = \mu(Lu + N(u))$, tj.
$S = \{(\mu, u) \in \mathbb{R} \times X : u = \mu(Lu + N(u)), u \neq 0\}$.

(1) (Lokalni rezultat, Krasnoselski) *Tada je μ_0 točka bifurkacije gornjeg problema.*

(2) (Globalni rezultat, Rabinowitz) *Ako je $C(\mu_0)$ komponenta povezanosti od $\overline{S}$ takva da je $(\mu, 0) \in C(\mu_0)$, onda imamo sljedeće mogućnosti:*

(a) *$C(\mu_0)$ je neograničen u $\mathbb{R} \times X$*

(b) *$C(\mu_0)$ je kompaktan i sadrži konačno mnogo točaka bifurkacije. Među njima je točno paran broj točaka bifurkacije $(\mu_i, 0)$ takav da je μ_i karakteristična vrijednost s neparnom kratnošću.*

Dokaz. (1) Neka je $F(\mu, u) := u - \mu(Lu + N(u))$ i pretpostavimo da μ_0, u_0 nije točka bifurkacije. Tada za bilo koji $r > 0$ dovoljno mali odgovarajuća "tablična" okolina $(\mu_0 - r,\, u_0 + r) \times B_r(0)$ od $(\mu_0, 0)$ sadrži samo trivijalna rješenja $(\mu, 0)$ jednadžbe $F(\mu, u) = 0$. Dakle, $\deg(F(\mu, \cdot), B_r(0), 0)$ je dobro definiran za svaki takav μ i mora biti konstanta po homotopskoj invarijantnosti.
S druge strane, kako je karakteristična vrijednost μ_0 izolirana, vrijedi
$\mu \in (\mu_0 - r, \mu_0 + r), \mu \neq \mu_0$ nije karakteristična vrijednost od L za r dovoljno mali. Prema Primjeru 4.2.2 i Lemi 4.1.3 imamo:

$$\deg(F(\mu, \cdot), B_r(0), 0) = (-1)^{\beta(\mu)},$$

gdje je $\beta(\mu)$ suma kratnosti karakterističnih vrijednosti od L iz intervala $(0, \mu)$. Uzmimo sada $\mu_1 > \mu_0$ i $\mu_2 < \mu_0$ tako da je $|\mu_i - \mu_0| < r, i = 1, 2$. Tada je $\beta(\mu_1) - \beta(\mu_2)$ kratnost od μ_0 i ona je neparna. S druge strane, prema homotopskoj invarijantnosti stupnja imamo $(-1)^{\beta(\mu_2)}$, što je nemoguće.

(2) Da bi dokazali globalni rezultat bifurkacije Rabinowitza, počinjemo s pomoćnom lemom.

Lema 4.2.6. (Ize) *Neka su L i N definirani kao u Teoremu 5.0.15. Definiramo $F : \mathbb{R} \times X \to X$ s $F(\mu, u) := u - \mu(Lu + N(u))$. Neka je μ_0 karakteristična vrijednost od L i $\varepsilon > 0$ takav da interval $I_\varepsilon = \mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon$ ne sadrži niti jednu drugu karakterističnu vrijednost. Neka je $r > 0$. Za $\mu_\pm \in I_\varepsilon, \mu_- < \mu_0 < \mu_+$ definiramo*

$$i_\pm = \deg(i - \mu_{pm}L, B_r(0), 0).$$

Uvodimo preslikavanje $G : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R} \times X$ definirano s

$$G(\mu, u) = (\|u\|^2 - r^2, u - \mu(Lu + N(u))).$$

Tada za $r > 0$ dovoljno mali imamo

$$\deg(G, B, (\mu_0, 0)) = i_- - i_+,$$

gdje je $B = \{(\mu, u) \in \mathbb{R} \times X : (\mu - \mu_0)^2 + \|u\|^2 \leq \varepsilon^2 + r^2\}$ kugla u $\mathbb{R} \times X$ sa središtem u $(\mu_0, 0)$.

Dokaz globalnog rezultata Rabinowitza. Neka je $C(\mu_0)$ ograničen. Dokazat ćemo da $C(\mu_0)$ mora biti kompaktan. Uzmimo bilo koji niz (μ_n, u_n) u $C(\mu_0)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $\mu_n \to \mu$ i $U_n \to u$ slabo u X kad $n \to \infty$. Sada je $u_n = \mu_n(Lu_n + N(u_n)) \to \mu(Lu + N(u))$ jer su operatori L i N kompaktni. Zaključujemo da je $u = \mu(Lu + N(u))$, tj. $(\mu, u) \in C(\mu_0)$ pa je kompaktnost od $C(\mu_0)$ dokazana.
Neka je Ω otvorena okolina od $C(\mu_0)$ u $\mathbb{R} \times X$ takva da

(i) rub od Ω ne sadrži netrivijalna rješenja $(\mu, u), u \neq 0$ jednadžbe $F(\mu, u) = 0$, gdje $F(\mu, u) = u - \mu(Lu + N(u))$.

(ii) Ako je μ_j karakteristična vrijednost takva da je $(\mu_j, 0) \in \Omega$, onda je $(\mu_j, 0) \in C(\mu_0)$.

Lako se vidi da Ω može biti definirana kao δ-okolina $C(\mu_0)_\delta$ od $C(\mu_0)$, gdje je $\delta > 0$ dovoljno mali. Zapravo, udaljenost među skupovima $C(\mu_0)$ i $M = S \setminus C(\mu_0)$ je pozitivna, recimo da je $\delta_1 > 0$, kako je $C(\mu_0) \cap M = \emptyset$ i $C(\mu_0)$ kompaktan, a M zatvoren. Dovoljno je uzeti $\delta = \delta_1/2$.
Neka je $r > 0$. Promotrimo preslikavanje $F_r : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \times X$ definirano s:

$$F_r(\mu, u) = (\|u\|^2 - r^2, F(\mu, u)).$$

Tada je $\deg(F_r, \Omega, (0, 0))$ dobro definiran jer ne postoje netrivijalna rješenja jednadžbe $F(\mu, u) = 0$ na $\partial\Omega$, te za trivijalna rješenja $(\mu, 0)$ ne možemo imati $\|u\| = r$ sa $u = 0$. Budući da je preslikavanje $(0, \infty) \ni r \mapsto F_r$ neprekidno na uniformnoj topologiji, stupanj $\deg(F_r, \Omega, (0, 0))$ nezavisan je s r. Ako uzmemo dovoljno velik r,
$r > \max \|u\| : u \in \overline{\Omega}$, onda jednadžba $F_r(\mu, u) = 0$ nema rješenja u Ω. Ovo povlači da je $\deg(F_r, \Omega, (0, 0)) = 0$ za sve $r > 0$. S druge strane, ako je $r > 0$ dovoljno mali, onda za bilo koje rješenje $(\mu, 0)$ od $F_r(\mu, u) = 0$ imamo $\|u\| = r$ pa po Teoremu 4.2.3 μ mora biti blizu jednoj od karakterističnih vrijednosti μ_j, $j = 0, 1, \ldots, k$ tako da je $(\mu_j, 0) \in C(\mu_0)$. Prema tome, $\deg(F_r, \Omega, (0, 0))$ jednak je sumi lokalnih stupnjeva od F_r :

$$0 = \deg(F_r, \Omega, (0, 0)) = \sum_{j=0}^{k} \deg(F_r, \Omega, (0, 0)),$$

gdje je ω_j dovoljno mala okolina od $(\mu_j, 0)$, $j = 0, \ldots, k$. Iz Leme 4.2.6 dobivamo:

$$0 = \sum_{j=0}^{k} [i_-(\mu_j) - i_+(\mu_j)].$$

Iz dokaza lokalnog rezultata Krasnoselskog znamo da je $i_+(\mu_j) = (-1)^{m_j} i_-(\mu_j)$, gdje je μ_j kratnost od μ_j. Ako je μ_j paran, onda je odgovarajući izraz u uglatim zagradama jednak nuli. Ako je μ_j neparan, onda je odgovarajući izraz ili 2 ili -2. Kako je suma nula, to znači da postoji jednak broj pozitivnih i negativnih izraza u sumi, imajući vrijednosti 2 i -2. Dakle, broj karatkerističnih vrijednosti μ_j s neparnom kratnošću mora biti paran.

□

Napomena 4.2.7. *Prethodni teoremi vrijede i za općenitije probleme oblika* $u = \mu L u + N(\mu, u)$, *uz pretpostavku da je* $N : \mathbb{R} \times X \to X$ *kompaktni operator i* $\lim_{u \to 0} \frac{N(\mu, u)}{||u||} = 0$ *uniformno za μ u omeđenim intervalima od* $\mathbb{R}$.

Bibliografija

[1] H. Kraljević, *Kompaktni operatori*, 2008.

[2] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza: Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, 1990.

[3] D. Mitrović, D. Žubrinić, *Fundamentals of applied functional analysis*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 91, Addison Wesley Longman, Harlow, 1998.

[4] P.H. Rabinowitz, *Théorie du degré topologique et Applications á des Problèmes aux Limites Nonlinéares (Notes par H. Beresticky)*, Univ. Paris VI, 1975.

Sažetak

U ovom radu uveden je pojam topološkog stupnja. Navedena su njegova osnovna svojstva te je opisana njegova konstrukcija. Konstrukcija se razlikuje ovisno o konačnosti dimenzije prostora na kojem je stupanj definiran. U slučaju konačne dimenzije topološki stupanj nazivamo Brouwerovim stupnjem, a u beskonačnodimenzionalnom slučaju Leray-Schauderov stupanj. Izneseni su neki važni teoremi koji podupiru teoriju stupnja kao što su Brouwerov teorem o fiksnoj točki te Schauderov teorem o fiksnoj točki. Kao primjer primjene stupnja naveden je topološki problem bifurkacije.

Summary

The objective of the present thesis is to define topological degree and it's construction. Depending on the dimension of the space there are different constructions. In finite-dimensional space we are talking about Brouwer's degree, while in infinite-dimensional space it is Leray-Schauder's degree. Important theorems for this theory are given. As an example for application of topological degree it is mentioned and explained topological problem of bifurcation.

Životopis

Rođena sam 25.05.1989. u Zagrebu. Pohađala sam osnovnu školu Davorina Trstenjaka te osnovnu glazbenu školu Zlatka Balokovića u Zagrebu. Zatim upisujem istoimenu srednju glazbenu školu, smjer: teoretičar glazbe, te zagrebačku drugu gimnaziju. Maturirala sam 2007. u glazbenoj školi, a 2008. u općoj gimnaziji. Tada na PMF-u upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematika; smjer: nastavnički. Godine 2011. ga završavam te upisujem Diplomski studij Financijska i poslovna matematika.